

OPTIMASI PERENCANAAN PRODUKSI WIRE DRAWING MENGUNAKAN MIXED INTEGER LINEAR PROGRAMMING (STUDI KASUS DI PT. SW)

M. Hasan Abdullah¹⁾, Antoni²⁾
Teknik Industri Universitas Wijaya Putra
mhasanabdullah@uwp.ac.id¹⁾, antoni@uwp.ac.id²⁾

Proses wire drawing adalah proses yang lazim digunakan pada industri kawat. Untuk menghasilkan produk tersebut dapat dikerjakan melalui mesin dan jalur wire drawing yang berbeda serta bahan yang berbeda. Setiap pilihan proses akan memberikan kontribusi biaya yang berbeda. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan permodelan matematis dengan aplikasi mixed integer non linear programming yang digunakan untuk menyelesaikan masalah perencanaan produksi dengan memaksimalkan keuntungan yang dapat diperoleh perusahaan. Fungsi tujuan pemodelan adalah keuntungan optimum yang diperoleh dari total penjualan dikurangi dengan total biaya yang terjadi. Dari hasil optimasi menunjukkan bahwa perusahaan mempunyai potensi keuntungan lebih tinggi sebesar Rp. 3.389.945.000,- atau 10% lebih tinggi dari perencanaan sebelumnya. Perencanaan produksi mengikuti alokasi bahan, mesin dan jalur berdasarkan variabel keputusan yang diperoleh dari pemodelan. Setiap produk akan diproses berdasarkan jenis bahan, nomor mesin, jalur tertentu serta jumlah tertentu. Perencanaan ini diaplikasikan dalam sebuah tableperencanaan agregat produksi. Pemodelan yang dibuat mampu memenuhi seluruh target produksi yang direncanakan dan mampu memenuhi batasan atau kendala yang ada.

Kata kunci : wire drawing, perencanaan produksi, mixed integer linear programming

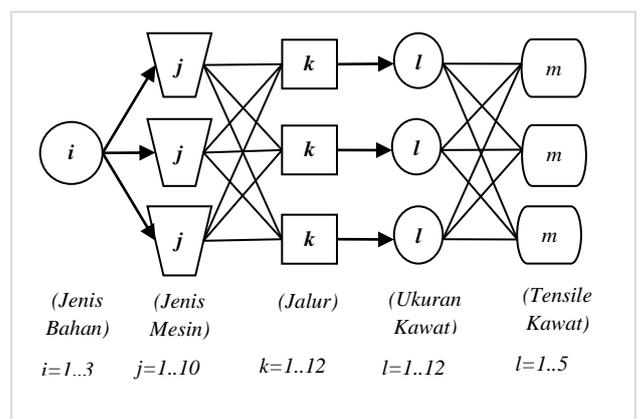
PENDAHULUAN

Proses penarikan kawat (*wire drawing*) adalah proses yang biasa digunakan pada industri kawat. Untuk menarik bahan *Wire Rod* menjadi kawat sesuai diameter yang diinginkan, setiap mesin bisa dipersiapkan untuk memproduksi kawat dengan diameter yang berbeda dengan cara mengganti susunan cetakan atau *dies*.

Semakin kecil diameter produk maka akan semakin besar reduksi yang dibutuhkan dan semakin banyak *dies* yang akan dipasang. Proses reduksi diameter kawat ini akan menimbulkan biaya dan waktu proses yang berbeda. Selain itu, proses penarikan kawat dapat mengakibatkan perubahan besaran kuat tarik atau *Tensile Strength*. Pertambahan kuat tarik pada kawat pada akhirnya harus memenuhi standar tertentu.

PT. SW sebagai produsen kawat mempunyai kendala dalam menentukan perencanaan produksi yang tepat agar diperoleh profit yang maksimal. Untuk menghasilkan produk kawat dapat dikerjakan dengan beberapa pilihan bahan, mesin dan jalur *wire drawing* yang berbeda. Setiap pilihan proses akan memberikan kontribusi biaya yang

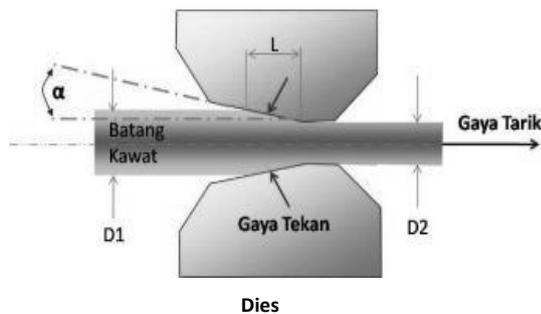
berbeda. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan permodelan matematis dengan aplikasi *mixed integer linear programming* yang digunakan untuk menyelesaikan masalah perencanaan produksi dengan memaksimalkan keuntungan yang dapat diperoleh perusahaan. Hasil akhir adalah bagaimana perusahaan merencanakan jumlah produksi yang tepat untuk tiap jenis produk agar tercapai keuntungan maksimal dengan menentukan alokasi faktor proses produksi seperti jenis bahan, mesin, dan jalur cetakan.



Gambar 1. Multiple Product Structure Produksi Kawat

TINJAUAN PUSTAKA

Proses penarikan kawat (*wire drawing*) merupakan suatu proses pembentukan logam dengan cara menarik kawat batangan (*wire rod*) melalui cetakan (*dies*) oleh gaya tarik yang bekerja ke arah luar *dies*. Proses ini dilakukan untuk membentuk kawat dengan diameter dan kuat tarik (*tensile strength*) tertentu. Reduksi diameter kawat akan mempengaruhi Tegangan (*stress*) dan Regangan (*strain*) pada kawat (Celentano, et. al., 2009).



Gambar 2. Penarikan Kawat Melalui Cetakan atau *dies*

Mesin Tarik didesain memanjang mengikuti alur atau susunan *dies* untuk mereduksi kawat dari diameter awal sampai diameter akhir yang diinginkan. Mesin ini terdiri dari blok-blok yang mempunyai penggerak motor untuk menarik kawat melalui *capstan*. *Wire rod* diletakkan pada sebuah konveyor putar kemudian ditarik oleh *capstan* melalui kotak *dies* yang di dalamnya terpasang *dies* untuk mereduksi diameter kawat. Gambar 3 menunjukkan mesin drawing yang terdiri dari beberapa *capstan*.



Gambar 3. Mesin Drawing

Untuk memenuhi permintaan produk dengan spesifikasi, jumlah dan jadwal tertentu maka perlu perencanaan agar fungsi tujuan tercapai dengan faktor dan kendala yang ada. Penelitian ini merupakan penerapan dan pengembangan model *linear programming*. Menurut Taylor (2010), istilah *linear programming*, menunjukkan hubungan fungsional dalam model matematis yang bersifat linear dan teknik pemecahan yang terdiri atas tahapan matematis. Variabel keputusan, fungsi tujuan, batasan merupakan hubungan linier yang menggambarkan batasan dalam pengambilan keputusan. Dalam penelitian ini beberapa variabel yang memiliki nilai *integer* (bilangan bulat). Model matematis untuk pemrograman *integer* adalah model pemrograman *linier* dengan tambahan satu batasan bahwa variabel-variabel harus memiliki nilai-nilai *integer* (Lieberman and Hillier, 2010).

Perencanaan produksi merupakan hal yang sangat penting dilakukan di lingkungan industri sebagai upaya untuk efisiensi, penjadwalan dan koordinasi dalam mencapai tujuan yang optimum (Rahmani, et. al, 2013). Model optimasi dikembangkan untuk merumuskan permasalahan meminimalkan total biaya termasuk biaya *set up*, biaya produksi, biaya tenaga kerja, dan biaya persediaan. Windarti (2013) menggunakan metode pemrograman linear pada perencanaan produksi *billet*. Penelitian lain dikembangkan oleh Hastuti, et. al (2007) untuk melakukan penjadwalan produksi di unit usaha kecil dan menengah. Shan Lu, et. al. (2015) menggunakan *mixed integer programming* pada industri multi produk.

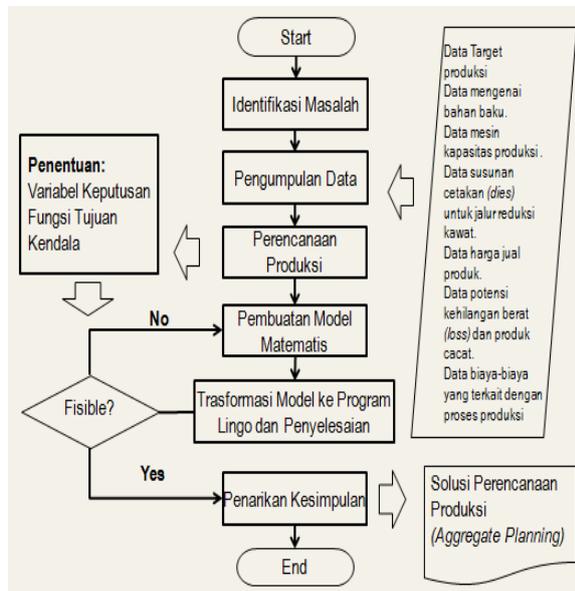
Hasil penelitian di bidang optimasi perencanaan produksi mampu meningkatkan keuntungan dan memenuhi permintaan. Hal ini mendorong berkembangnya kajian pendekatan pemrograman linier untuk menyelesaikan permasalahan *aggregate planning*.

METODOLOGI PENELITIAN

1. Identifikasi Masalah

Tahap ini dilakukan pada obyek penelitian dengan melakukan identifikasi permasalahan yang terjadi saat ini. Pengamatan dilakukan

pada proses *wire drawing* di PT. SW. Beberapa penelitian sebelumnya yang terkait dengan penelitian digunakan sebagai referensi pada penelitian yang akan dilakukan. Akhir dari tahap ini adalah adanya perumusan masalah serta tujuan dari penelitian.



Gambar 4. Alur Metodologi Penelitian

2. Pengumpulan Data

Data-data yang digunakan dalam penelitian ini diperoleh dari hasil observasi terhadap kondisi dan parameter proses produksi yang berlangsung sesuai kondisi aktual di lapangan. Data-data yang diperlukan dalam penelitian yang berkaitan dengan optimasi perencanaan proses produksi *wire drawing* adalah sebagai berikut:

1. Data Target produksi kawat.
2. Data mengenai bahan baku.
3. Data mesin kapasitas produksi .
4. Data susunan cetakan (*dies*) untuk jalur reduksi kawat.
5. Data harga jual produk.
6. Data potensi kehilangan berat (*loss*) dan produk cacat.
7. Data biaya-biaya yang terkait dengan proses produksi

3. Pengolahan Data

a. Menentukan variabel keputusan

Variabel keputusan yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

X_{ijklm} : Jumlah unit (ton) produk kawat yang diproses dari jenis bahan i menggunakan mesin j melalui jalur k menjadi diameter akhir l (mm) dengan kuat tarik m (kg/mm²)

Dengan indeks:

i : jenis bahan *Wire Rod* yang digunakan ($i = 1, 2, \dots, o$)

j : mesin yang digunakan ($j = 1, 2, \dots, p$)

k : jalur atau susunan dies ($k = 1, 2, \dots, q$)

l : diameter akhir kawat ($l = 1, 2, \dots, r$)

m : kuat tarik produk kawat ($m = 1, 2, \dots, s$)

b. Formulasi fungsi tujuan

Tujuan yang akan dicapai dalam persoalan ini adalah mencari bauran hasil produksi kawat yang tepat dari kendala-kendala yang ada agar diperoleh keuntungan yang maksimal. Setiap produk dengan diameter akhir l milimeter (mm) dengan kuat tarik m (kg/mm²) memiliki harga jual yang berbeda sehingga akan mempengaruhi fungsi tujuan. Fungsi tujuan dalam pemodelan ini adalah memaksimalkan keuntungan. Secara umum keuntungan (*profit*) dapat diperoleh dari total penjualan dikurangi dengan total biaya produksi.

$$\text{Max } Z = (\text{Total Penjualan} - \text{Total Biaya})$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \alpha_{lm} \cdot \rho_{ijklm} \cdot X_{ijklm} - \left\{ \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \varphi_{jk} \cdot J_{jk} \right. \\ &+ \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q (\varphi_{ju(uek)} - \varphi_{jk} \cdot J_{jk}) \cdot J_{ju} \\ &+ \sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \tau_{ijklm} \cdot X_{ijklm} \\ &\left. + \sum_{j=1}^p \zeta_j \cdot OT_j + \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s (\sigma_{lm} \cdot S_{lm} + \mu_{lm} \cdot O_{lm}) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

c. Persamaan total penjualan

Persamaan total penjualan diperoleh dari total perkalian dari harga jual produk kawat diameter l dengan kuat tarik m dengan jumlah produk yang dihasilkan dari bahan baku i dari mesin j melalui jalur k .

Persamaan nilai uang yang diperoleh dari penjualan produk adalah sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \alpha_{lm} \cdot \rho_{ijklm} \cdot X_{ijklm} \quad (2)$$

dengan:

α_{lm} : koefisien harga jual produk kawat berdiameter l dengan kuat tarik m (Rp/Ton)

ρ_{ijklm} : koefisien (≤ 1) yang diberikan untuk mengantisipasi jumlah produk cacat yang bisa terjadi pada proses produksi kawat dengan jalur proses dan spesifikasi produk tertentu. Untuk proses dengan cacat 5%, misalnya, harga ρ_{ijklm} adalah 0.95.

Berikut data koefisien harga jual produk kawat dan potensi rijek pada setiap ukuran.

Tabel 1. Harga Jual Produk Kawat

Index (D _{lm})	Diameter (mm)	TS (kg/mm ²)	α_{lm}
D ₀₁₀₁	5,59	55-95	7.6
D ₀₂₀₂	4,19	60-105	8.0
D ₀₃₀₂	3,76	60-105	8.4
D ₀₄₀₂	3,38	60-105	8.7
D ₀₅₀₃	3,05	70-115	9.2
D ₀₆₀₃	2,80	70-115	9.6
D ₀₇₀₃	2,41	70-115	9.8
D ₀₈₀₄	2,11	75-130	10.2
D ₀₉₀₄	1,83	75-130	10.5
D ₁₀₀₄	1,65	75-130	10.8
D ₁₁₀₅	1,23	80-150	11.2
D ₁₂₀₅	1,05	80-150	11.50

Saat proses penarikan kawat, bahan akan mengalami reduksi dan berpotensi untuk kehilangan berat.

Tabel 2. Potensi Loss Berat Bahan

Jenis Bahan	Potensi Loss (%)
WR 1	1,41
WR 2	1,47
WR 3	1,64

Selain mengalami *loss* pada berat, proses produksi kawat juga menghasilkan produk cacat. Dimana setiap ukuran kawat akan mempunyai potensi rijek yang berbeda.

Tabel 3. Potensi Reject Tiap Produk Kawat

Ø Produk Kawat (mm)	Potensi Cacat (%)
5,59	0,04
4,19	0,04
3,76	0,05
3,38	0,06
3,05	0,07
2,80	0,07
2,41	0,08
2,11	0,08
1,83	0,09
1,65	0,10
1,23	0,12
1,05	0,13

Penulisan fungsi tujuan pada program Lingo sebagai berikut:

Max =

$$(7.6*0.986*X_{0101010101} + 7.6*0.985*X_{0201010101} + 7.6*0.983*X_{0301010101} + \dots + 12*0.982*X_{0210121205} + 12*0.982*X_{0310121205}) -$$

d. Persamaan biaya

Biaya tersebut terdiri dari biaya persiapan jalur, biaya produksi, biaya *overtime*, dan biaya kelebihan atau kekurangan stok.

(1) Biaya persiapan Jalur.

Biaya persiapan dituliskan dengan:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \varphi_{jk} \cdot J_{jk} \quad (3)$$

Dengan:

φ_{jk} : biaya persiapan di mesin j jalur k (Rp)

J_{jk} : bilangan biner.

Contoh penulisan dalam Lingo sebagai berikut:

$$(0.006 * J0101 + 0.006 * J0102 + \dots + 0.035 * J1001 + 0.038 * J1012)$$

Jalur u pada mesin j disusun dengan menambahkan dies baru dari jalur sebelumnya sehingga biaya yang terjadi adalah biaya jalur u dikurangi dengan biaya persiapan pada jalur sebelumnya yaitu jalur k . Karena jalur k merupakan bagian dari jalur u .

Biaya persiapan jalur u dapat dituliskan:

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q (\varphi_{ju(u \in k)} - \varphi_{jk} \cdot J_{jk}) \cdot J_{ju} \tag{4}$$

Dengan:

φ_{ju} : biaya persiapan di mesin j jalur cabang u (Rp). Jalur u adalah cabang dari jalur k tertentu.

J_{ju} : bilangan biner. (bernilai 1 jika jalur dipakai, 0 jika tidak).

Contoh penulisan dalam Lingo sebagai berikut:

$$((0.009 - 0.006 * J0102) * J0103) + ((0.012 - 0.009 * J0103) * J0104) + \dots + ((0.038 - 0.035 * J1011) * J1012)$$

Untuk notasi bilangan biner penulisan di LINGO sebagai berikut.

@BIN(J0102);@BIN(J0103);.....@BIN(J1012);

(2) Biaya produksi

Biaya produksi merupakan biaya inti yang sangat mempengaruhi dalam profit. Biaya proses diperoleh dari perhitungan biaya tetap dan biaya variabel tiap produk.

Tabel 4. Biaya Proses Produksi

Variabel Produk	Biaya Proses
X ₀₁₀₁₀₁₀₁₀₁	6,06
X ₀₁₀₁₀₂₀₂₀₂	6,07
X ₀₁₀₁₀₃₀₃₀₂	6,09
X ₀₁₀₁₀₄₀₄₀₂	6,11
X ₀₁₀₁₀₅₀₅₀₃	6,14
X ₀₁₀₁₀₆₀₆₀₃	6,15
X ₀₁₀₁₀₇₀₇₀₃	6,19
X ₀₁₀₁₀₈₀₈₀₄	6,27
X ₀₁₀₁₀₉₀₉₀₄	6,35
X ₀₁₀₁₁₀₁₀₀₄	6,53
X ₀₁₀₁₁₁₁₁₀₅	7,03
X ₀₁₀₁₁₂₁₂₀₅	7,53

Biaya proses tersebut akan berbeda untuk masing-masing jenis produk yang bisa dirumuskan sebagai:

$$\sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \tau_{ijklm} \cdot X_{ijklm} \tag{5}$$

Dengan:

τ_{ijklm} : koefisien biaya proses (Rp/ton)

Biaya produksi juga akan ditambahkan apabila terjadi penambahan jam kerja dan terjadi kelebihan atau kekurangan produksi.

Contoh penulisan dalam Lingo sebagai berikut:

$$(6.06 * X0101010101 + 6.07 * X0101020202 + \dots + 7.53 * X0101121205)$$

(3) Biaya tambahan jam kerja.

Biaya *overtime* yang terpakai dimodelkan sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^p \zeta_j \cdot OT_j \tag{6}$$

direncanakan. Berikut jumlah produksi untuk masing-masing ukuran kawat.

Dengan:

- ζ_j : koefisien biaya *overtimemesin* j (Rp/jam)
- OT_j : jumlah overtime yang terjadi pada mesin j (jam)

Contoh penulisan dalam Lingo sebagai berikut:
(0.017*OT1 + 0.017*OT2 + 0.017*OT3 + ... + 0.017*OT10)

(4) Biaya kekurangan dan kelebihan produksi.
Biaya kekurangan dan kelebihan produksi dimodelkan sebagai berikut:

$$\sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s (\sigma_{lm} \cdot S_{lm} + \mu_{lm} \cdot O_{lm}) \tag{7}$$

Dengan:

- σ_{lm} : biayakekurangan produk diameter l , dengan tensile strength m (Rp/Ton)
- S_{lm} : Jumlahkekurangan produk diameter l dengan tensile strength m (Ton)
- μ_{lm} : biaya kelebihan produk diameter l dengan tensile strength m (Rp/Ton)
- O_{lm} : Jumlah kelebihan produk diameter l dengan tensile strength m (Ton)

Berikut contoh sebagian penulisan dalam program Lingo:

$$\begin{aligned} &(1.14*S0101 + 0.05*O0101) + \\ &(1.20*S0202 + 0.05*O0202) + \\ &(1.26*S0302 + 0.05*O0302) + \\ &\dots + \dots \\ &(1.62*S1004 + 0.05*O1004) + \\ &(1.68*S1105 + 0.05*O1105) + \\ &(1.73*S1205 + 0.05*O1205) \end{aligned}$$

e. Menentukan Fungsi Pembatas

1) Batasan Permintaan Produk
Jumlah produk yang dihasilkan harus memenuhi target / permintaan yang telah

Tabel 5. Target Produksi Kawat

Index (D_{lm})	Diameter (mm)	Standar TS (kg/mm ²)	Target (Ton)
D ₀₁₀₁	5,59	55-95	45
D ₀₂₀₂	4,19	60-105	10
D ₀₃₀₂	3,76	60-105	215
D ₀₄₀₂	3,38	60-105	5
D ₀₅₀₃	3,05	70-115	5
D ₀₆₀₃	2,80	70-115	260
D ₀₇₀₃	2,41	70-115	5
D ₀₈₀₄	2,11	75-130	75
D ₀₉₀₄	1,83	75-130	280
D ₁₀₀₄	1,65	75-130	55
D ₁₁₀₅	1,23	80-150	55
D ₁₂₀₅	1,05	80-150	70

Batasan permintaan produksi diformulasikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q P_{ijklm} \cdot X_{ijklm} + S_{lm} - O_{lm} = D_{lm} \tag{8}$$

dengan:

D_{lm} : permintaan produk kawat diameter l dengan kuat tarik m (Ton)

Berikut adalah contoh sebagian formulasi matematis pada program Lingo.

$$\begin{aligned} &0.986*X0101010101 + 0.985*X0201010101 + \\ &0.983*X0301010101 + \\ &\dots + \dots \\ &0.986*X0112010101 + 0.985*X0212010101 + \\ &0.983*X0312010101 + \\ &S0101 - O0101 = 45; \end{aligned}$$

2) Batasan Kapasitas Mesin produksi

Waktu yang dibutuhkan untuk memproses tiap jenis ukuran mempunyai waktu yang berbeda. Sehingga kapasitas mesin jam/ton akan berbeda untuk tiap jenis kawat yang

diproduksi. Berikut waktu proses untuk tiap ukuran kawat.

Tabel 6. Waktu proses produk kawat

Ø (mm)	Laju produksi (Jam/Ton) pada Mesin				
	1	2	3	4	5
5,59	0,56	0,36	0,55	0,38	0,41
4,19	1,00	0,65	0,99	0,67	0,73
3,76	1,24	0,80	1,22	0,84	0,91
3,38	1,54	1,00	1,52	1,04	1,12
3,05	1,89	1,22	1,86	1,27	1,38
2,08	2,24	1,45	2,21	1,51	1,64
2,41	3,02	1,96	2,98	2,04	2,21
2,11	3,95	2,56	3,89	2,66	2,88
1,83	5,24	3,40	5,17	3,53	3,84
1,65	6,45	4,18	6,36	4,34	4,72
1,23	11,61	7,52	11,44	7,82	8,49
1,05	15,93	10,32	15,70	10,73	11,65
Ø (mm)	Laju produksi (Jam/Ton) pada Mesin				
	6	7	8	9	10
5,59	0,54	0,52	0,52	0,41	0,40
4,19	0,96	0,93	0,92	0,73	0,72
3,76	1,19	1,16	1,14	0,91	0,89
3,38	1,47	1,43	1,41	1,12	1,10
3,05	1,81	1,76	1,74	1,38	1,35
2,08	2,15	2,09	2,06	1,64	1,60
2,41	2,90	2,82	2,78	2,21	2,16
2,11	3,78	3,68	3,63	2,88	2,82
1,83	5,02	4,89	4,82	3,84	3,75
1,65	6,18	6,01	5,93	4,72	4,62
1,23	11,12	10,81	10,67	8,49	8,31
1,05	15,26	14,84	14,64	11,65	11,40

Formulasi batasan kapasitas produksi untuk masing-masing mesin dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^o \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \lambda_{ijklm} \cdot X_{ijklm} - OT_j = KM_j \tag{9}$$

dengan:

KM_j : kapasitas produksi mesin j yang tersedia(Jam)

λ_{ijklm} : koefisien laju produksi (Jam/Ton)

OT_j : waktu overtime yang muncul pada mesin j (Jam)

overtime tiap mesin akan memenuhi syarat sebagai berikut:

$$OT_j \leq \pi_j \quad j = 1, \dots, p \tag{10}$$

dengan:

π_j : waktu overtime maksimal yang disediakan untuk mesin j (Jam)

Berikut adalah contoh penulisan sebagian formulasi matematis pada program Lingo.

Untuk mesin 1.

$$0.56 * X0101010101 + 1.00 * X0101020202 +$$

$$\dots +$$

$$\dots +$$

$$15.93 * X0301121205 - OT1 \leq 368;$$

Batasan Overtime.

$$OT1 \leq 50;$$

3) Batasan kekurangan dan kelebihan produksi

Batasan Kekurangan jumlah produk dengan diameter dan kuat tarik tertentu diformulasikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q S_{ilm} \leq 0.01 D_{ilm} \tag{11}$$

Batasan Kelebihan jumlah produk dengan diameter dan kuat tarik tertentu.

$$\sum_{i=1}^o \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q O_{ilm} \leq 0.05 D_{ilm} \tag{12}$$

Berikut adalah contoh sebagian formulasi matematis pada program Lingo Batasan kekurangan produksi.

$$S0101 \leq 0.01 * 45;$$

$$S0202 \leq 0.01 * 10;$$

:

$$S1105 \leq 0.01 * 55;$$

$$S1205 \leq 0.01 * 70;$$

Batasan kelebihan produksi.

$$O0101 \leq 0.05 * 45;$$

$$O0202 \leq 0.05 * 10;$$

⋮

$$O1105 \leq 0.05 * 55;$$

$$O1205 \leq 0.05 * 70;$$

4) Batasan Switching

Batasan switching ini berguna untuk memastikan bila kawat diproses pada jalur tertentu maka jalur tersebut harus diaktifkan. Batasan ini diformulasikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^o \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s X_{ijklm} - \beta_j \cdot J_{jk} < 0$$

(13)

Dengan:

β_j : kapasitas maksimal mesin j (Ton)

J_{jk} : bilangan biner. (bernilai 1 jika jalur dipakai, 0 jika tidak).

Berikut contoh penulisan sebagian formulasi matematis pada program Lingo.

Pada Mesin 1.

$$X0101010101 - 1500 * J0101 < 0;$$

$$X0101020202 - 1500 * J0102 < 0;$$

⋮

$$X0301111105 - 1500 * J0111 < 0;$$

$$X0301121205 - 1500 * J0112 < 0;$$

5) Batasan bahan baku

Bahan baku yang tersedia akan menjadi fungsi kendala pada optimasi. Berikut jumlah ketersediaan untuk tiap jenis bahan baku.

Tabel 7. Bahan Baku yang Tersedia

Index (i)	Jenis, Grade	Jumlah (Ton)
01	Ø 7 SWRM R06	500
02	Ø 7 SWRM R10	500
03	Ø 7 SWRM R12	500

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s X_{ijklm} = WR_i$$

(14)

Dengan:

WR_i : bahan baku wire rod jenis i yang tersedia (Ton)

Berikut contoh penulisan sebagian formulasi matematis pada program Lingo.

Bahan WR1.

$$X0101010101 + X0101020202 +$$

..... +

$$X0110111105 + X0110121205$$

$$\leq 500;$$

f. Penyelesaian Persamaan

Penyelesaian model optimasi dilakukan dengan menggunakan software pemrograman LINGO. Hasil akhir permodelan akan berupa jumlah produk yang harus dibuat pada masing-masing mesin dengan berbagai jalur, untuk bahan yang berbeda, yang bisa memenuhi permintaan produk akhir dengan diameter dan karakteristik mekanik yang sudah ditentukan.

Variabel keputusan yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

X_{ijklm} : Jumlah unit (ton) produk kawat yang diproses dari bahan i dengan menggunakan mesin j melalui jalur k menjadi diameter akhir l (mm) dengan kuat tarik m (kg/mm²)

Dengan indeks:

i : jenis bahan *Wire Rod* yang digunakan ($i = 1, 2, 3$)

j : mesin yang digunakan ($j = 1, 2, \dots, 10$)

k : jalur atau susunan dies ($k = 1, 2, \dots, 12$)

l : diameter akhir produk kawat ($l = 1, 2, \dots, 12$)

m : kuat tarik produk kawat ($m = 1, 2, \dots, 5$)

Contoh penulisan notasi pada program Lingo sebagai berikut:

$X_{0101020201}$: kuantitas produk kawat yang diproses dari bahan 01 dengan menggunakan mesin 01 melalui jalur 02 menjadi diameter akhir 02 dengan kuat tarik 01.

Variabel lainnya meliputi:

OT_{01} : jumlah overtime yang terjadi pada mesin 01

S_{0101} : jumlah kekurangan produk dengan diameter akhir 01 dan kuat tarik 01

O_{0101} : jumlah kelebihan produk dengan diameter akhir 01 dan kuat tarik 01

J_{0101} : jalur yang digunakan pada mesin 01 jalur 01

Variabel bernilai Integer.

$OT_j = \text{Integer}, j = 1, \dots, 10.$

Berikut contoh penulisan sebagian formulasi matematis pada program Lingo.

@GIN (OT1);...; @GIN (OT10);

Variabel Bilangan Biner.

$J_{jk} = \text{Biner}, j = 1, \dots, 10 \text{ dan } k = 1, \dots, 12.$

Berikut contoh penulisan sebagian formulasi matematis pada program Lingo.

@BIN(J0101);...; @BIN(1012);

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data yang terkait dengan pemodelan kemudian diolah dan diterapkan ke dalam rumus. Penerapan model dilakukan dengan memasukkan seluruh variabel, koefisien biaya, dan batasan ke dalam software. Penyelesaian model optimasi dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak Lingo. Setelah keseluruhan model matematis tertulis pada program, maka dilakukan *running* model untuk mencari solusi yang optimal. Solusi yang diharapkan dari model matematis adalah solusi yang *feasible* dan menghasilkan fungsi tujuan yang optimal yakni keuntungan maksimal

Hasil *running* menunjukkan bahwa model formulasi pada program Lingo memiliki 514 variabel, 130 *integer*, 420 *constraint* dan 2382 *non zeros*. Penyelesaian optimal diperoleh setelah melalui 52744 iterasi dengan nilai fungsi tujuan sebesar 3389,95 atau (Rp. 3.389.950.000,-).

Berikut hasil Keuntungan hasil optimasi.

```
Global optimal solution found.
Objective value:                3389.945
Objective bound:                3389.945
Infeasibilities:                 0.000000
Extended solver steps:          1
Total solver iterations:        52744
```

Gambar 5. Hasil Solusi program LINGO
Analisis dan pembahasan

Analisis hasil solusi dari model optimasi dilakukan untuk membandingkan dan memastikan bahwa hasil solusi dari optimasi perencanaan produksi kawat yang dihasilkan dengan *mixed integer linier programming* dapat menunjukkan hasil solusi fungsi tujuan yakni keuntungan yang lebih baik dari pada metode perusahaan sebelumnya.

Nilai variable keputusan

Nilai variable keputusan diperlihatkan pada tabel 8. Nilai tersebut merupakan jumlah yang diproduksi untuk masing-masing variable dengan penggunaan bahan, mesin dan jalur untuk produk kawat yang mempunyai diameter dan kuat tarik tertentu. Ada kelebihan jumlah produksi untuk jenis produk tertentu, namun masih dalam batasan yang diijinkan.

Tabel 8. Nilai Variabel Hasil Optimasi

Variabel	Nilai	Variabel	*Nilai
X ₀₃₀₆₀₁₀₁₀₁	48	X ₀₁₀₅₀₉₀₉₀₄	22
X ₀₁₀₃₀₂₀₂₀₂	11	X ₀₁₀₆₀₉₀₉₀₄	18
X ₀₂₀₃₀₃₀₃₀₂	126	X ₀₁₀₇₀₉₀₉₀₄	82
X ₀₃₀₃₀₃₀₃₀₂	102	X ₀₁₀₉₀₉₀₉₀₄	8
X ₀₂₀₃₀₄₀₄₀₂	5	X ₀₁₁₀₀₉₀₉₀₄	111
X ₀₂₀₃₀₅₀₅₀₃	5	X ₀₁₀₅₁₀₁₀₀₄	17
X ₀₂₀₁₀₆₀₆₀₃	33	X ₀₁₀₉₁₀₁₀₀₄	41
X ₀₂₀₃₀₆₀₆₀₃	41	X ₀₁₀₄₁₁₁₁₀₅	7
X ₀₂₀₈₀₆₀₆₀₃	203	X ₀₁₀₅₁₁₁₁₀₅	30
X ₀₂₀₇₀₇₀₇₀₃	5	X ₀₁₀₉₁₁₁₁₀₅	22
X ₀₂₀₆₀₈₀₈₀₄	80	X ₀₁₀₂₁₂₁₂₀₅	41
X ₀₁₀₁₀₉₀₉₀₄	56	X ₀₁₀₄₁₂₁₂₀₅	34

*(telah dilakukan pembulatan)

Hasil produksi sebelum dan setelah optimasi menunjukkan kemampuan yang berbeda dalam memenuhi target yang direncanakan. Hasil optimasi mampu memenuhi seluruh jumlah

produk yang harus diselesaikan. Berbeda dengan hasil sebelum optimasi, ada beberapa produk yang tidak bisa terpenuhi. Berikut perbandingan hasil produksi dan target yang telah ditentukan.

Tabel 9. Pencapaian Produksi Sebelum dan Setelah Optimasi

Produk	Target Produksi	Sebelum Optimasi	Setelah Optimasi
D ₀₁₀₁	45	41	48
D ₀₂₀₂	10	9	11
D ₀₃₀₂	215	214	228
D ₀₄₀₂	5	2	5
D ₀₅₀₃	5	3	5
D ₀₆₀₃	260	256	277
D ₀₇₀₃	5	2	5
D ₀₈₀₄	75	73	80
D ₀₉₀₄	280	268	297
D ₁₀₀₄	55	52	58
D ₁₁₀₅	55	53	59
D ₁₂₀₅	70	70	75

Produk dengan index D₀₁₀₁ merupakan notasi untuk permintaan produk kawat sebanyak 45 Ton dengan diameter 5,59 mm yang memiliki standar *Tensile Strength* (TS) 55-95kg/mm².

Kelebihan jumlah produksi dari hasil optimasi masih dalam batasan yang diijinkan. Kelebihan produksi yang diijinkan tidak lebih dari 10% dari target yang direncanakan. Sedangkan kekurangan produksi tidak melebihi 5% dari minimal permintaan.

Dari jumlah produk yang dihasilkan maka bisa diketahui total nilai penjualan (*revenue*). Perhitungan nilai jual sebelum optimasi diperoleh bahwa total nilai penjualan adalah sebesar Rp. 10.222.000.000,- dengan keuntungan (profit) perusahaan pada periode produksi bulan Februari adalah sebesar Rp. 3.070.295.000,-. Berikut tabel perbandingan beberapa faktor sebelum dan setelah optimasi dilakukan.

Tabel 10 Perbandingan Hasil Optimasi

Faktor	Sebelum Optimasi	Setelah Optimasi
Pencapaian Target	96.57%	100% (surplus)

Produksi		
Nilai Penjualan	Rp. 10.222.200.000	Rp. 11.249.900.000
Profit	Rp. 3.070.295.000	Rp. 3.389.945.000

Hasil optimasi perencanaan produksi dengan model dalam penelitian ini, menghasilkan *revenue* sebesar Rp. 11.249.900.000 dan keuntungan sebesar Rp. 3.389.945.000,- atau 10 % lebih tinggi.

Perencanaan Agregasi Metode Optimasi

Untuk mencapai profit yang optimum maka perlu dilakukan perencanaan produksi sesuai dengan variable keputusan yakni bagaimana menentukan jumlah produksi (Ton) tiap produk kawat dengan pemakaian bahan baku dan alokasi mesin yang ada.

Dari nilai variabel keputusan yang didapat, maka bisa dijabarkan ke dalam rencana produksi dengan penggunaan bahan mesin jalur dan jumlah sebagai berikut.

Tabel 11 Perencanaan Agregat

Produk	Bahan (W _i)	Mesin (M _j)	Jalur (J _k)	Jumlah (Ton)
D ₀₁₀₁	3	6	1	48
D ₀₂₀₂	1	3	2	11
D ₀₃₀₂	2	3	3	126
	3	3	3	102
D ₀₄₀₂	2	3	4	5
D ₀₅₀₃	2	3	5	5
D ₀₆₀₃	2	1	6	33
	2	3	6	41
	2	8	6	203
D ₀₇₀₃	2	7	7	5
D ₀₈₀₄	2	6	8	80
D ₀₉₀₄	1	1	9	56
	1	5	9	22
	1	6	9	18
	1	7	9	82
	1	9	9	8
	1	10	9	111
D ₁₀₀₄	1	5	10	17
	1	9	10	41
D ₁₁₀₅	1	4	11	7
	1	5	11	30
	1	9	11	22
D ₁₂₀₅	1	2	12	41
	1	4	12	34

Berikut perencanaan agregat yang digunakan dalam optimasi yaitu jumlah unit (ton) produk kawat yang diproses dari jenis bahan W1, W2 dan W3, dengan alokasi pemakaian mesin M1 sampai M10 (tabel 11). Misalkan untuk memenuhi permintaan produk kawat D_{0202} atau produk kawat berdiameter 4.19 mm dengan kuat tarik sebesar 60-105 kg/mm², maka bahan yang dipakai adalah bahan W1 atau SWRM R6 dengan menggunakan mesin nomor 3 (M3) sebanyak 11 ton.

Untuk mencapai keuntungan maksimal maka perusahaan melakukan perencanaan proses produksi kawat dengan penggunaan bahan, mesin serta setting jalur dengan jumlah produksi seperti pada tabel di atas.

Analisis

Analisis dilakukan terhadap variabel keputusan dan nilai fungsi pembatas.

A. Analisis terhadap variabel keputusan

Variabel keputusan dalam optimasi perencanaan produksi adalah berapa jumlah produk kawat yang harus diproduksi pada masing-masing mesin dengan pemakaian bahan baku serta jumlah kekurangan dan kelebihan produksi yang diijinkan agar tercapai solusi optimum. Selain itu juga dihasilkan jumlah waktu tambahan (*overtime*) yang diperlukan pada tiap mesin. Agar perusahaan dapat memperoleh keuntungan yang maksimal maka perusahaan hendaknya memproduksi kawat sesuai dengan jumlah dan pemakaian bahan serta alokasi mesin sebagaimana variabel keputusan dalam optimasi. Untuk variabel kekurangan dan kelebihan masing-masing produk kawat. Tidak ada kekurangan produksi artinya semua permintaan jenis produk dapat dipenuhi.

Kelebihan produksi terjadi pada semua jenis kawat, namun masih dalam batasan yang diijinkan yaitu tidak melebihi 5% dari permintaan. Dengan melihat *reduced cost* pada tiap kelebihan produksi dapat dijelaskan bahwa kelebihan produk tersebut tidak akan berdampak pada berkurangnya nilai tujuan. Sebaliknya, jika terjadi kekurangan pada produk maka akan terjadi pengurangan dari fungsi tujuan (profit).

B. Analisis pada batasan permintaan.

Pada tabel 12 berikut terlihat bahwa seluruh permintaan atau target produksi tercapai. Nilai positif pada *dual price*, akan dapat meningkatkan keuntungan jika dilakukan penambahan satu ton pada produk tersebut. Jadi kendala pada permintaan ini merupakan kendala aktif dimana jika terjadi perubahan pada kapasitas permintaan akan mempengaruhi fungsi tujuan (keuntungan) sebesar nilai *dual price*.

Tabel 12 Hasil Optimasi Pada Batasan Permintaan

Produk	Variabel Keputusan	slack or surplus	Dual Price
D ₀₁₀₁	48	0	0.22
D ₀₂₀₂	11	0	0.61
D ₀₃₀₂	228	0	0.98
D ₀₄₀₂	5	0	1.27
D ₀₅₀₃	5	0	1.74
D ₀₆₀₃	277	0	2.12
D ₀₇₀₃	5	0	2.28
D ₀₈₀₄	80	0	2.60
D ₀₉₀₄	297	0	2.81
D ₁₀₀₄	58	0	2.96
D ₁₁₀₅	59	0	2.92
D ₁₂₀₅	75	0	2.78

C. Analisis pada batasan kapasitas mesin

Seluruh kapasitas jam mesin yang tersedia terpakai keseluruhan, hal ini ditandai dengan nilai nol pada kolom *slack or surplus*, kecuali pada mesin 1 dan mesin 3. Nilai *dual price* positif pada kapasitas mesin tertentu akan dapat menaikkan keuntungan sebesar nilai *dual price* apabila dilakukan penambahan kapasitas jam mesin pada mesin tersebut. Namun pada

mesin yang lain tidak akan memberikan tambahan keuntungan apabila dilakukan penambahan kapasitas jam mesin (nilai *dual price*0). Hal ini bisa terjadi karena masing-masing mesin mempunyai laju produksi yang berbeda.

Tabel 13. Hasil Optimasi pada Batasan Kapasitas Mesin

Mesin	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.14	0
2	0	0.35
3	0.46	0
4	0	0.30
5	0	0.20
6	0	0.19
7	0	0.40
8	0	0.48
9	0	0.20
10	0	0.24

D. Analisis pada batasan *overtime*

Pada batasan *overtime*, semua mesin memakai *overtime* yang diijinkan. Hal ini ditandai dengan nilai 0 pada slack or surplus. Hanya pada mesin 1 dan 3 yang tidak habis terpakai. Pada mesin 1 dan 3 bernilai 50 dan 19. Artinya, mesin 1 tidak membutuhkan tambahan waktu sedangkan mesin 3 hanya menggunakan tambahan waktu 19 jam dari 50 jam yang diberikan. Penambahan kapasitas jam lembur tidak berdampak pada fungsi tujuan.

Tabel 14. Hasil Optimasi pada Batasan *Overtime*

Variabel	Slack or Surplus	Dual price
OT01	50	0
OT02	0	0
OT03	19	0
OT04	0	0
OT05	0	0
OT06	0	0
OT07	0	0
OT08	0	0
OT09	0	0
OT10	0	0

Pada beberapa mesin, jam mesin tambahan tidak terpakai dan nilai *dual price*-nya

adalah nol. Maka pada mesin tersebut jika dilakukan penambahan tidak akan berpengaruh pada keuntungan maksimal.

E. Analisis pada batasan kekurangan dan kelebihan produksi

Pada model optimasi diperoleh bahwa produk cenderung dibuat melebihi dari permintaan. Namun masih dalam batasan yang diijinkan. Jika batasan kelebihan itu ditambahkan maka akan ada pengaruh terhadap kenaikan keuntungan. Sebaliknya, batasan kekurangan produk tidak digunakan (nilai (S_{lm}) adalah nol).

Tabel 15. Batasan Kekurangan (S_{lm})

Produk (D_{mn})	S_{lm} (Ton)	Slack or Surplus	Dual price
D ₀₁₀₁	0	0.45	0
D ₀₂₀₂	0	0.1	0
D ₀₃₀₂	0	2.15	0
D ₀₄₀₂	0	0.5	0
D ₀₅₀₃	0	0.5	0
D ₀₆₀₃	0	2.6	0
D ₀₇₀₃	0	0.5	0
D ₀₈₀₄	0	0.75	0
D ₀₉₀₄	0	2.8	0
D ₁₀₀₄	0	0.55	0
D ₁₁₀₅	0	0.55	0
D ₁₂₀₅	0	0.7	0

Tabel 16. Batasan Kelebihan Produksi (O_{lm})

Produk (D_{mn})	O_{lm} (Ton)	Slack or Surplus	Dual price
D ₀₁₀₁	0.25	0	0.17
D ₀₂₀₂	0.50	0	0.56
D ₀₃₀₂	10.75	0	0.93
D ₀₄₀₂	0.25	0	1.22
D ₀₅₀₃	0.25	0	1.69
D ₀₆₀₃	13.00	0	2.07
D ₀₇₀₃	0.25	0	2.23
D ₀₈₀₄	3.75	0	2.55
D ₀₉₀₄	14.00	0	2.76
D ₁₀₀₄	2.75	0	2.91
D ₁₁₀₅	2.75	0	2.87
D ₁₂₀₅	3.50	0	2.73

F. Analisis batasan bahan baku

Hasil optimasi menunjukkan bahwa bahan baku Wire Rod 1 dan 2 (WR01 dan WR02) habis terpakai. Hal ini ditunjukkan dengan nilai nol pada kolom *slack* atau *surplus*. Batasan pada bahan baku ini merupakan batasan atau kendala aktif dimana akan ada penambahan keuntungan apabila ditambahkan pada setiap unit bahan baku.

Tabel 17. Hasil Optimasi pada Batasan Bahan Baku

(WR _i)	<i>slack or surplus</i>	<i>Dual Price</i>
WR01	0.00	1.21
WR02	0.00	0.61
WR03	348.43	0.00

Dari beberapa batasan atau kendala yang ada, semua kendala merupakan kendala aktif, dengan kata lain penambahan pada setiap kendala akan menaikkan fungsi tujuan (profit). Kecuali pada kendala *overtime* dan kekurangan produk, hal ini ditandai dengan nilai *dual price* sama dengan nol. Program tidak mengambil penuh pada batasan tersebut.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan analisis yang telah dilakukan selama penelitian maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Model optimasi yang dibuat menunjukkan bahwa perusahaan mempunyai potensi keuntungan lebih tinggi sebesar Rp. 3.389.945.000,- atau 10% lebih tinggi dari sistem sebelumnya.
2. Variabel keputusan dalam optimasi perencanaan produksi diaplikasikan dalam Tabel Perencanaan Agregat Produksi, dimana setiap jenis produk kawat akan diproses dengan bahan, mesin dan jalur sesuai nilai pada variabel keputusan sehingga nilai fungsi tujuan maksimum bisa tercapai.
3. Model optimasi dalam penelitian ini mempunyai sensitivitas terhadap batasan atau kendala yang ada. Kecuali pada batasan *overtime* dan kekurangan

produksi yang diijinkan oleh manajemen perusahaan.

Dengan memperhatikan beberapa hal terkait dengan pemodelan dan hasil optimasi, maka perlu dilakukan penyesuaian dan perhitungan lebih detail mengenai komponen biaya produksi, tidak hanya biaya variabel namun juga biaya tetap dan *overhead*. Hal lain yang perlu ditambahkan antara lain, perencanaan hanya dilakukan pada 1 bulan yakni pada bulan Februari 2018, untuk itu agar optimasi lebih baik perlu dilakukan peramalan terhadap permintaan selama 1 tahun.

DAFTAR PUSTAKA

- Celentano, D.J, Palacios, M.A., Rojas, E.R., Cruchaga, M.A., Artigas, A.A., Monsalva, A.E. (2009), "Simulation and experimental validation of multiple-step wire drawing processes", *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 45, hal. 163-180.
- Hastuti, P.R, Yuliando, H., Aziz, I.W.F., (2015), Production Scheduling Using Mixed Integer Programming: Case of Bread Small and Medium Enterprise at Yogyakarta, *Agriculture and Agricultural Science*, Prodia 3, hal. 211-215.
- Lieberman and Hillier, (2010). *Introductions to Operations Research: Ninth Edition*. New York: McGraw-Hill Book company.
- Rahmani, D., Ramezania, R., Fattahi, P., Heydari, M. (2013), A Robust Optimization Model for Multi-Product two stage Capacitated Production Planning Under Uncertainty, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, hal. 8957-8971.
- Shan Lu, et. al (2015), Multi-product Multi-stage Production Planning with Lead Time on a Rolling Horizon Basis, *IFAC-Papers On Line* 48-8 (2015) 1162–1167
- Taylor III, Bernard W. (2010). *Introduction to Management Science: Tenth Edition*. Prentice-Hall, Inc.

Windarti, T. (2013), Pemodelan Optimalisasi Produksi untuk Memaksimalkan Keuntungan dengan Menggunakan Metode Pemrograman Linier, *Spektrum Industri*, 2013, Vol. 11, No. 2, 117 – 242. ISSN : 1963-6590.