

# KEMAMPUAN PENALARAN MAHASISWA DALAM PEMBUKTIAN TEOREMA PADA MATA KULIAH ANALISIS REAL 1

**Ikhsan**

*Universitas Muhammadiyah Gresik  
ikhsanfalihi@gmail.com*

## **Abstrak**

Penelitian ini bertujuan untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dalam hal penalaran pada mata kuliah Analisis Real 1. Mata kuliah Analisis Real 1 menekankan pembuktian teorema-teorema dasar pada bilangan real. Subyek dalam penelitian ini adalah mahasiswa semester lima tahun akademik 2015/2016 Program Studi Pendidikan Matematika. Kemampuan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dalam hal penalaran pada saat awal memasuki semester lima masih dikategorikan sama dengan kemampuan mahasiswa tahun-tahun sebelumnya pada awal-awal memasuki semester lima. Jenis penelitian ini adalah Penelitian Tindakan Kelas (PTK) melalui kegiatan Lesson Studi dengan empat siklus. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kemampuan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dalam hal penalaran melalui pembuktian teorema pada mata kuliah Analisis Real 1 dikategorikan baik secara signifikan. Artinya ada peningkatan secara signifikan kemampuan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dalam hal penalaran melalui pembuktian teorema pada mata kuliah Analisis Real 1.

**Kata Kunci :** *Kemampuan penalaran, Teorema, Lesson Studi.*

## **Abstract**

*The study aimed to improve Math students' ability in reasoning Real Analysis 1 subject. The subject focuses on proving the basics theorems in real number. The subject of the study is the fifth semester students, year 2015/2016 of Math department. The fifth Students' ability in analyzing the subject was not improved. Thus, the classroom action research was conducted through a lesson study program consisting of four cycles. The result of the study showed that students' reasoning in the subject was significantly good. Means that there was a significant improvement for their ability through Real analysis 1 subject focusing on proving basic theorems.*

**Keywords :** *reasoning skill, theorem, lesson study*

---

## **PENDAHULUAN**

Bahan Pembelajaran Analisis Real 1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Gresik menekankan pada pemahaman konsep dan pembuktian teorema yang terkait dengan

bilangan real, fungsi, limit, dan barisan. Untuk mengawali perkuliahan ini mahasiswa diingatkan beberapa materi prasyarat pada bahan pembelajaran Matematika Dasar dan Teori Bilangan. Selanjutnya, mahasiswa harus mengingat kembali tentang himpunan dan

logika. Di pertemuan awal mahasiswa diberikan bahan-bahan pembelajaran meliputi himpunan, konsep bilangan real, definisi-definisi yang berlaku pada bilangan real, dan beberapa sifat yang berlaku pada bilangan real. Selanjutnya bahan pembelajaran secara terpadu digunakan untuk membuktikan teorema-teorema selanjutnya.

Adapun teorema dalam matematika memiliki padanan kata sebagai berikut: sifat, dalil, kaidah, atau nisbah. Teorema diartikan sebagai pernyataan yang memiliki kebenaran dimana kebenarannya harus dibuktikan. Dalam pembelajaran Analisis Real ! para mahasiswa diberikan berbagai definisi dan teorema yang mendasar tentang bilangan real. Di sini mahasiswa harus membuktikan kebenaran teorema-teorema tersebut. Untuk membuktikan teorema-teorema tersebut, para mahasiswa harus memiliki bekal yang berupa penguasaan tentang himpunan, logika, konsep, dan definisi yang terkait dengan hal tersebut. Selain bekal tersebut ada hal yang tidak kalah pentingnya yaitu penalaran. Penalaran mahasiswa sangat berperan penting dalam membuktikan beberapa teorema pada materi Analisis Real 1.

Penalaran merupakan aktivitas berpikir yang abstrak. Untuk mewujudkannya diperlukan simbol atau lambang. Simbol yang digunakan dalam penalaran berbentuk bahasa, sehingga penalaran tersebut berupa argumen. Kita mengetahui bahwa matematika memiliki ciri proses bernalarnya deduktif formal dan abstrak (abstrak dalam arti objek-objek telaahnya tidak kasat oleh panca indera, mereka hanya ada dalam pemikiran manusia). Selain itu

ciri matematika yang lain adalah penggunaan simbol-simbol yang kosong dari arti, hubungan, pola, bentuk, dan struktur.

Penalaran matematika diperlukan baik untuk menentukan apakah sebuah argumen matematika benar atau salah maupun untuk membangun suatu argumen matematika. Oleh karena itu, penalaran matematika tidak hanya penting untuk membuktikan kebenaran argumen tetapi juga untuk menyusun argumen baru.

Menurut R.G. Soekadjo penalaran adalah suatu bentuk pemikiran. Soekadjo menyatakan rangkaian penalaran, proses berfikir dimulai dari pengamatan indera atau observasi empiris. Proses itu di dalam pikiran menghasilkan sejumlah pengertian dan proposisi sekaligus. Berdasarkan pengamatan-pengamatan indera yang sejenis, pikiran menyusun proposisi yang sejenis pula. Proses inilah yang disebut dengan penalaran yaitu bahwa berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar kemudian digunakan untuk menyimpulkan sebuah proposisi baru yang sebelumnya tidak diketahui.

Hardjosatoto memberikan definisi penalaran sebagai berikut penalaran adalah proses dari budi manusia yang berusaha tiba pada suatu keterangan baru dari sesuatu atau beberapa keterangan lain yang telah diketahui dan keterangan yang baru itu mestilah merupakan urutan kelanjutan dari sesuatu atau beberapa keterangan yang semula itu.

Selanjutnya Karin Brodie mengungkap penalaran matematika dengan mengemasnya dalam sebuah istilah *mathematical reasoning*. Karin Brodie menyatakan bahwa: *Mathematical*

*reasoning is reasoning about and with the object of mathematics.* Ungkapan Karin Brodie tentang penalaran matematika dapat dimaknai sebagai penalaran objek matematika. California High School Exit Examination (CAHSEE) (yang termuat di link <http://www.cde.ca.gov/ta/tg/hs/documents/mathStudisec5.pdf>) mengungkapkan tentang penalaran matematika sebagai berikut “*Mathematical Reasoning*” *includes the logical thinking skills that you develop while learning mathematics and can carry over into other disciplines. The Mathematical Reasoning strand includes: recognizing and generalizing patterns, identifying and organizing relevant information, validating conjectures both inductively and deductively.*

Sumarmo sendiri mengungkap pengertian penalaran melalui beberapa indikator. Menurut Sumarmo, penalaran matematika adalah aktivitas yang tercakup di dalam penalaran matematika yaitu: (1) Menarik kesimpulan logis, (2) Menggunakan penjelasan dengan menggunakan model, fakta, sifat-sifat dan hubungan, (3) Memperkirakan jawaban dan proses solusi, menggunakan pola dan hubungan, (4) Untuk menganalisis situasi matematik, (5) Menarik analogi dan generalisasi, (6) Menyusun dan menguji aturan inferensi, (7) Memeriksa validitas argumen, (8) Menyusun argumen yang valid, (9) Menyusun pembuktian langsung, (10) Menggunakan induksi matematika.

Menurut Peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas Nomor 506/C/Kep/PP/2004 tanggal 11 November 2004 tentang rapor diuraikan bahwa indikator siswa yang memiliki kemampuan dalam penalaran matematika

adalah: (a) Mengajukan dugaan, (b) Melakukan manipulasi matematika, (c) Menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi, (d) Menarik kesimpulan dari pernyataan, (e) Memeriksa kesahihan suatu argumen, (f) Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Dari beberapa paparan penalaran tersebut, penulis hanya menentukan beberapa indikator untuk mengungkap penalaran matematika yang berkaitan dengan pembuktian teorema-teorema. Oleh karena itu, dalam tulisan ini kemampuan mahasiswa dalam hal penalaran di bidang matematika khususnya materi Analisis Real 1 dapat diketahui dengan memperhatikan beberapa indikator antara lain: (1) Mampu memahami apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan, (2) Menyusun konjektur dan strategi pembuktian, (3) Memberikan alasan yang logis dalam setiap langkah pembuktian, (4) Menggunakan hubungan atau koneksi antar teorema maupun definisi, (5) Menarik analogi dan generalisasi untuk merumuskan kesimpulan. Selanjutnya, penalaran mahasiswa matematika yang berkaitan dengan pembuktian teorema yang dinyatakan dengan lima indikator tersebut dikenal dengan istilah kemampuan penalaran matematika.

Metode proyek dalam pembuktian teorema digunakan mahasiswa karena banyak waktu yang dibutuhkan oleh mahasiswa untuk mendiskusikan beberapa teorema yang diberikan oleh dosen. Beberapa teorema dipecahkan oleh mahasiswa secara berkelompok di luar waktu pembelajaran di kelas.

Beberapa kenyataan yang terjadi pada mahasiswa dapat diungkap sebagai berikut:(1) Pembuktian teorema yang diserahkan kepada mahasiswa untuk dikerjakan di kelas saat pembelajaran membutuhkan waktu yang lama bahkan menghabiskan waktu pembelajaran di kelas. Ketika pembuktian teorema tersebut dilakukan secara individu, mahasiswa sering mengalami kesulitan di tengah-tengah langkah pembuktian teorema dari serangkaian langkah pembuktian teorema. (2) Pembuktian teorema sering kali menjadi hal yang sangat detail dan teliti untuk mengasah kemampuan mahasiswa dalam penalaran. Dalam keadaan yang demikian, masih tersimpan anggapan yang berat untuk mengikuti materi-materi matematika khususnya dalam pembuktian teorema-teorema, padahal sesungguhnya pembuktian teorema-teoremainilah ruh untuk berkembangnya ilmu matematika. (3) Ketika *Open Class* dalam *Lesson Studi* dilaksanakan pada saat-saat tertentu, mahasiswa merasa terawasi sangat intensif oleh banyak dosen dan banyak pihak sehingga pembelajaran menjadi serius dan terkonsentrasikan ke satu tujuan. Kondisi ini berbeda dengan ketika mahasiswa belajar hanya terpantau oleh seorang dosen, sehingga mahasiswa matematika merasa kurang bisa leluasa *ngobrol* dengan teman sebelahnya. *Obrolannya* tidak terkait dengan materi matematika.(4) Kenyataan lainnya, mahasiswa sering mengungkapkan argumen yang kurang terstruktur. Kurang lancar dalam penyusunan konjektur-konjektur. Urutan-urutan dan keteraturan pola berargumen masih kurang diperhatikan oleh mahasiswa.

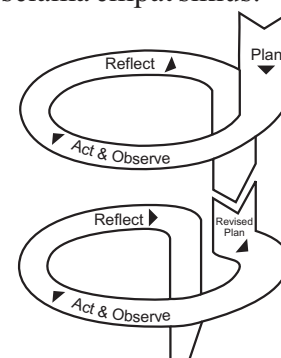
(5) Pemaduan beberapa definisi dan teorema masih kurang dikuasai oleh mahasiswa. Dari aspek matematika, keadaan ini dapat diperbaiki dengan meningkatkan penalaran matematikanya. Peningkatan kemampuan penalaran matematikanya dapat dilakukan melalui latihan pembuktian teorema.

Berdasarkan pada uraian-uraian tersebut di atas, penulis mengangkat rumusan masalah sebagai berikut apakah kemampuan penalaran mahasiswa dalam membuktikan teorema pada mata kuliah Analisis Real 1 dapat ditingkatkan melalui metode proyek?

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendiskripsikanpeningkatan kemampuan penalaran mahasiswa dalam membuktikan teorema pada mata kuliah Analisis Real 1 melalui metode proyek.

#### METODE PENELITIAN

*Lesson Study* yang diterapkan dalam pembelajaran Analisis Real 1 didesain dalam tiga fase yaitu fase plan, fase do (*action and observation*), dan fase see (*reflection*). Ketiga fase tersebut juga tercantum dalam desain *Classroom Action Research by Kemmis dan Taggart*. Oleh karena itu jenis penelitian ini adalah Penelitian Tindakan Kelas (PTK) melalui kegiatan *Lesson Studi*. Penelitian ini dilaksanakan selama empat siklus.



Gambar Desain PTK Kemmis dan Taggart

Subyek dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Gresik semester lima kelas pagi yang menempuh mata kuliah Analisis Real 1 tahun akademik 2015/2016 sebanyak 32 mahasiswa. Bahan pembelajaran yang ditekankan dalam penelitian ini adalah: (1) Sifat Aljabar Bilangan Real, (2) Sifat Urutan Bilangan Real, (3) Nilai Mutlak, (4) Sifat Kelengkapan Bilangan Real.

Data hasil penelitian ini berupa data kuantitatif yang diperoleh dari hasil observasi selama empat siklus pada setiap fase *Do*. Lembar observasi disusun berdasarkan indikator kemampuan penalaran dalam pembuktian teorema. Untuk memudahkan observer melakukan pengamatan dan penilaian disusun rubrik pengamatan.

Data hasil observasi penalaran mahasiswa dalam pembuktian teorema dianalisis menggunakan nilai rata-rata hitung sebagai berikut:

$$\text{rata-rata skor indikator ke-}i \text{ untuk semua siklus} \\ = \frac{\text{jumlah skor indikator ke-}i \text{ untuk semua siklus}}{\text{banyaknya siklus}}$$

dan

$$\text{rata-rata skor siklus ke-}i \\ = \frac{\text{jumlah skor semua indikator pada siklus ke-}i}{\text{banyaknya indikator}}$$

Standar penilaian menggunakan standar Universitas Muhammadiyah Gresik adalah E (0 sampai 40), D (41 sampai 54), C (55 sampai 60), BC (61 sampai 65), B (66 sampai 70), AB (71 sampai 79) dan A (80 sampai 100). Kategori penilaian sebagai berikut: nilai A dan AB

kategori sangat baik, nilai B termasuk kategori baik, nilai BC dan C termasuk kategori cukup, dan nilai D dan E termasuk kategori kurang.

Selanjutnya konversi skor yang dibuat oleh penulis artikel ke skor Universitas Muhammadiyah Gresik adalah 1: sangat kurang: dikonversi ke skor Universitas Muhammadiyah Gresik menjadi E, 2: kurang: dikonversi ke skor Universitas Muhammadiyah Gresik menjadi D, 3: cukup: dikonversi ke skor Universitas Muhammadiyah Gresik menjadi BC atau C, 4: baik: dikonversi ke skor Universitas Muhammadiyah Gresik menjadi B, 5: sangat baik: dikonversi ke skor Universitas Muhammadiyah Gresik menjadi AB atau A.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Observasi selama empat siklus dapat dirinci sebagai berikut:

### Siklus 1

Pada fase *Do 1* mahasiswa dibagi dalam beberapa kelompok secara heterogen, dengan anggota tiap kelompok 5 atau 6 mahasiswa. Dari hasil observasi selama fase *do 1* diperoleh data sebagai berikut:

Tabel Rata-rata Kemampuan Penalaran dalam Pembuktian Teorema pada Siklus 1

No.	Indikator	Skor Rata-rata
1	Mampu memahami apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan	4
2	Menyusun konjektur dan strategi pembuktian	4
3	Memberikan alasan yang logis dalam setiap langkah pembuktian	4
4	Menggunakan hubungan atau koneksi antar teorema maupun definisi	4,5
5	Menarik analogi dan generalisasi untuk merumuskan kesimpulan	4,5

Dari data tersebut dapat ditentukan skor rata-rata untuk siklus 1 dengan menggunakan rumus

rata-rata skor siklus ke-1

$$= \frac{\text{jumlah skor semua indikator pada siklus ke-1}}{\text{banyaknya indikator}}$$

Rata-rata skor siklus ke-1 adalah 4,2

Disimpulkan bahwa kemampuan penalaran mahasiswa dalam matematika pada siklus 1 rata-ratanya 4,2, dibulatkan menjadi 4, sehingga dikategorikan baik.

### Siklus 2

Tabel Rata-rata Kemampuan Penalaran dalam Pembuktian Teorema pada Siklus 2

No.	Indikator	Skor Rata-rata
1	Mampu memahami apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan	4,5
2	Menyusun konjektur dan strategi pembuktian	4,25
3	Memberikan alasan yang logis dalam setiap langkah pembuktian	4,25
4	Menggunakan hubungan atau koneksi antar teorema maupun definisi	4
5	Menarik analogi dan generalisasi untuk merumuskan kesimpulan	4,25

Dari data tersebut dapat ditentukan skor rata-rata untuk siklus 2 dengan menggunakan rumus

rata-rata skor siklus ke-2

$$= \frac{\text{jumlah skor semua indikator pada siklus ke-2}}{\text{banyaknya indikator}}$$

Rata-rata skor siklus ke-2 adalah 4,25

Disimpulkan bahwa kemampuan penalaran mahasiswa dalam matematika pada siklus 2 rata-ratanya 4,25, dibulatkan menjadi 4, sehingga dikategorikan baik.

### Siklus 3

Tabel Rata-rata Kemampuan Penalaran dalam Pembuktian Teorema pada Siklus 3

No.	Indikator	Skor Rata-rata
1	Mampu memahami apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan	5
2	Menyusun konjektur dan strategi pembuktian	4,75
3	Memberikan alasan yang logis dalam setiap langkah pembuktian	4,25
4	Menggunakan hubungan atau koneksi antar teorema maupun definisi	4,25
5	Menarik analogi dan generalisasi untuk merumuskan kesimpulan	3,75

Dari data tersebut dapat ditentukan skor rata-rata untuk siklus 3 dengan menggunakan rumus

rata-rata skor siklus ke-3

$$= \frac{\text{jumlah skor semua indikator pada siklus ke-3}}{\text{banyaknya indikator}}$$

Rata-rata skor siklus ke-3 adalah 4,4

Disimpulkan bahwa kemampuan penalaran mahasiswa dalam matematika pada siklus 3 rata-ratanya 4,4, dibulatkan menjadi 4, sehingga dikategorikan baik.

### Siklus 4

Tabel Rata-rata Kemampuan Penalaran dalam Pembuktian Teorema pada Siklus 4

No.	Indikator	Skor Rata-rata
1	Mampu memahami apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan	4
2	Menyusun konjektur dan strategi pembuktian	4,17
3	Memberikan alasan yang logis dalam setiap langkah pembuktian	3,83
4	Menggunakan hubungan atau koneksi antar teorema maupun definisi	3,5
5	Menarik analogi dan generalisasi untuk merumuskan kesimpulan	4,17

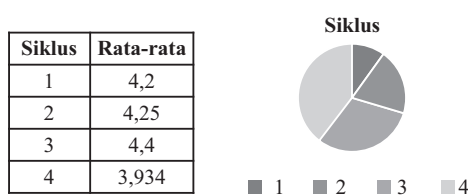
Dari data tersebut dapat ditentukan skor rata-rata untuk siklus 4 dengan menggunakan rumus

rata-rata skor siklus ke-4

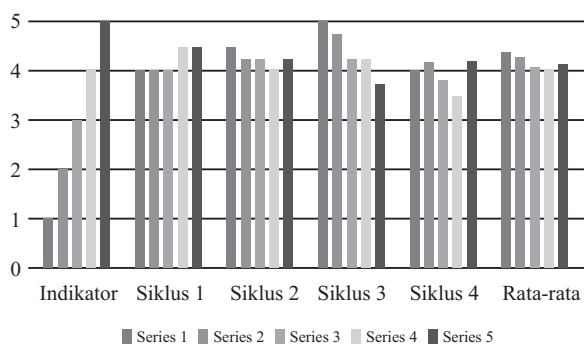
$$= \frac{\text{jumlah skor semua indikator pada siklus ke-4}}{\text{banyaknya indikator}}$$

Rata-rata skor siklus ke-4 adalah 3,934  
 Disimpulkan bahwa kemampuan penalaran mahasiswa dalam matematika pada siklus 4 rata-ratanya 3,934, dibulatkan menjadi 4, sehingga dikategorikan baik.

Dari data empat siklus diatas kemampuan penalaran mahasiswa dalam matematika dari siklus 1 sampai siklus 4 dapat disajikan dalam diagram lingkaran sebagai berikut:



Sedangkan untuk kemampuan penalaran mahasiswa dalam matematika tiap indikator dari siklus 1 sampai siklus 4 disajikan dalam diagram berikut berikut:



Penurunan rata-rata kemampuan mahasiswa pada siklus 4 disebabkan oleh indikator yang keempat yaitu menggunakan hubungan atau koneksi antar teorema maupun definisi.

Indikator ini menuntut mahasiswa menghubungkan definisi dan teorema untuk melangkah pada langkah pembuktian selanjutnya. Namun mahasiswa kelihatan sangat sulit melalui langkah ini, hal ini karena materi

yang dihadapi makin rumit, yang mengharuskan mahasiswa mengingat semua definisi, aksioma, dan teorema tatap muka sebelumnya untuk dijadikan pijakan dalam melangkah.

Namun demikian, kemampuan penalaran mahasiswa matematika pada pembelajaran Analisis Real 1 masih dikategorikan baik walaupun siklus 4 mengalami sedikit penurunan. Selama empat siklus setiap indikator rata-rata skor indikator masih bertahan di angka 4 lebih sedikit.

## SIMPULAN DAN SARAN

### Simpulan

Berdasarkan pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa kemampuan mahasiswa dalam hal penalaran matematika pada mata kuliah Analisis Real 1 dapat ditingkatkan melalui pembuktian teorema. Kemampuan tersebut dapat dilihat pada indikatornya dari siklus ke siklus berikutnya. Dari keseluruhan siklus yang terobservasi selama fase *Do*, didapatkan rata-ratanya 4,196, sehingga dikategorikan baik.

### Saran

Kepada semua pembaca, diharapkan dapat menjadikan artikel ini sebagai awal untuk riset di situasi dan kondisi yang lain. Namun demikian, artikel ini disusun menggunakan data yang terbatas dalam skala mikro yaitu hanya menggunakan data yang terambil selama observasi, belum menggunakan tes dan wawancara secara personal.

Kemampuan penalaran mahasiswa yang diobservasi masih sebatas lima indikator, oleh karena itu, periset dapat mengembangkan lebih

banyak lagi sesuai kriteria situasi dan kondisi yang ada.

Metode proyek yang digunakan lumayan memberikan ruang dan waktu bagi mahasiswa untuk mendiskusikan materi secara leluasa di luar jam perkuliahan.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- Bartle, G. Robert dan Sherbert, R. Donald. 1982. *Introduction to Real Analysis..* United States of America. John Wiley & Sons Inc.
- Brodie, Karin. 2010. *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classroom.* New York: Springer.
- Direktorat Pembelajaran dan Kemahasiswaan, 2011, *Pedoman Penulisan Makalah Lesson Studi Untuk Seminar Exchange Experience*, Dirjen Dikti, Kementrian Pendidikan Nasional, Jakarta.
- Soekadijo, R.G. 1985. *Logika Dasar. Tradisional, Simbolik, dan Induktif.* Jakarta: PT. Gramedia.
- Sumarmo, Utari. 2003. *Daya dan Disposisi Matematik: Apa, Mengapa, dan Bagaimana dikembangkan pada Siswa Sekolah Dasar dan Menengah.* Makalah disajikan pada seminar sehari di jurusan matematika ITB, Oktober 2003.
- Hardjisatoto, Suhartoyo dan Asdi, Endang Daruni. 1979. *Pengantar Logika Modern Jilid I.* Yogyakarta: Fakultas Filsafat Universitas Gadjah Mada.  
<http://www.cde.ca.gov/ta/tg/hs/documents/mathStudisec5.pdf> diakses pada hari Selasa, 15 Desember 2015 pukul 05:15 WIB.